

**Matematica per l'Economia e l'Impresa - Corso
Avanzato - 11 Ottobre 2019**

Esercizio 1 (8 punti). Consideriamo l'applicazione lineare da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^4 tale che:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (0, x_1 - x_2, x_1 + 2x_2, 0).$$

1. Determinare delle basi per i sottospazi vettoriali $\text{Ker}(F)$ e $\text{Im}(F)$.
2. Determinare le matrici $A = M(F)$, A^T e $A^T A$.
3. Calcolare autovalori ed autovettori di $A^T A$ e stabilire se è diagonalizzabile.

* * *

Esercizio 2 (4 punti). Date le matrici quadrate $A, B \in M_N(\mathbb{R})$, tali che se $AB = BA$, dimostrare che se $(A + B)^2 = (A - B)^2$, allora necessariamente $AB = 0$ (matrice nulla).

* * *

Esercizio 3 (10 punti). Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y(x)}{x+2} + 4x \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Chiamata $y^*(x)$ la soluzione del problema, determinare il suo dominio.

* * *

Esercizio 4 (8 punti). Data la seguente funzione:

$$F(x, y) = x^3 - 6x^2 + y^3 - 3y^2 + 20,$$

determinarne massimi e minimi relativi vincolati alla curva $x^2 - y^2 = 16$.