

**Matematica per l'Economia e l'Impresa - Corso
Avanzato - 15 Aprile 2019**

Esercizio 1 (8 punti). Data l'applicazione lineare da \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^4 tale che

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - 2x_4, -2x_1 + 2x_4, x_1 - 4x_3 + 3x_4, 3x_1 - 3x_4),$$

1. scrivere la matrice associata all'applicazione $A = M(F)$;
2. trovare delle basi dei sottospazi vettoriali $\text{Ker}(F)$ e $(\text{Ker}(F))^\perp$;
3. calcolare autovalori ed autovettori di A e stabilire se è diagonalizzabile.

* * *

Esercizio 2 (4 punti). Dati la matrice $A \in M_N(\mathbb{R})$ e un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$, con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, e chiamato il vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$ tale che $A\mathbf{v} = \mathbf{w}$, dimostrare che se $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$, allora la matrice A non è invertibile (il simbolo \langle, \rangle denota il prodotto scalare euclideo).

* * *

Esercizio 3 (10 punti). Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{2} \left(y(x) + \frac{1}{y(x)e^x} \right) \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

* * *

Esercizio 4 (8 punti). Data la seguente funzione

$$F(x, y, z) = \ln(x^4 + 2y^4 + 1) - x^2 + y^2 + z^3 - 3z,$$

determinarne tutti i punti stazionari e identificare la loro tipologia.