

**Matematica per l'Economia e l'Impresa - Corso
Avanzato - 13 Settembre 2019**

Esercizio 1 (8 punti). Consideriamo l'applicazione lineare da \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^3 tale che:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_1 + x_2, 0, x_3 + 2x_4).$$

1. Trovare delle basi per i sottospazi vettoriali $\text{Ker}(F)$ e $\text{Im}(F)$.
2. Detta $A = M(F)$, determinare la matrice $B = A^T \cdot A$.
3. Determinare autovalori ed autovettori della matrice B e stabilire se è diagonalizzabile.

* * *

Esercizio 2 (4 punti). Dati i vettori non nulli $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$, e la matrice $A \in M_N(\mathbb{R})$, dimostrare che:

$$\text{se } \begin{cases} A\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \\ A\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{w} \end{cases} \quad \text{allora } \mathbf{v} \text{ è autovettore di } A^2 \text{ con autovalore } 2.$$

* * *

Esercizio 3 (10 punti). Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{y(x) + x} - 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}.$$

Chiamata $y^*(x)$ la soluzione del problema, determinare il suo dominio.

* * *

Esercizio 4 (8 punti). Data la seguente funzione a 3 variabili:

$$F(x, y, z) = \left(\sqrt{x} + \sqrt{3y} \right)^2 - 2x - 4y^2 + z^2 - 1,$$

determinare i suoi eventuali punti stazionari e la loro rispettiva natura.