

**Matematica per l'Economia e l'Impresa - Corso  
Avanzato - 10 Giugno 2019**

**Esercizio 1 (8 punti).** Data l'applicazione lineare da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^3$  tale che:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_3, 3x_2 - 6x_3, -x_2 + 2x_3),$$

1. Trovare delle basi per i sottospazi vettoriali  $Ker(F)$  e  $Im(F)$ .
2. Detta  $A = M(F)$ , trovare autovalori ed autovettori di  $A$ .
3. Dato un vettore  $\mathbf{v} \in Ker(A)$ , trovare un vettore di  $\mathbb{R}^3$  che sia ortogonale a  $\mathbf{v}$ .

\* \* \*

**Esercizio 2 (4 punti).** Dati i 2 vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  in  $\mathbb{R}^N$ , entrambi diversi dal vettore nullo, e la matrice  $A \in M_N(\mathbb{R})$ , dimostrare che, se:

$$A\mathbf{v} = \mathbf{w}, \qquad A\mathbf{w} = \mathbf{v},$$

allora sia  $\mathbf{v}$  che  $\mathbf{w}$  sono autovettori di  $A^2$  con autovalore 1.

\* \* \*

**Esercizio 3 (10 punti).** Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{2xy(x)}{x^2 + 1} + 4x \\ y(1) = 1 \end{cases}.$$

\* \* \*

**Esercizio 4 (8 punti).** Data la seguente funzione

$$F(x, y, z) = 4x - 3xz^2 - x^2 + y^2 - 2y,$$

determinarne tutti i punti stazionari e identificare la loro tipologia.