

**Matematica per l'Economia e l'Impresa - Corso
Avanzato - 29 Gennaio 2020**

Esercizio 1 (2 + 2 + 4 **punti**). Consideriamo le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{R}),$$
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R}).$$

1. Determinare le matrici prodotto AB e BA .
2. Trovare delle basi dei sottospazi vettoriali $\text{Ker}(AB)$ e $(\text{Ker}(AB))^\perp$.
3. Calcolare autovalori ed autovettori di AB e stabilire se è diagonalizzabile.

* * *

Esercizio 2 (4 **punti**). Date le due matrici invertibili $A, B \in M_N(\mathbb{R})$ e due vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$ tali che

$$\begin{cases} A\mathbf{v} = \mathbf{w} \\ B\mathbf{w} = \mathbf{v} \end{cases},$$

dimostrare che $\lambda = 1$ è autovalore sia della matrice AB che della matrice BA .

* * *

Esercizio 3 (10 **punti**). Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{x}{(x + y(x))^2} - 1 \\ y(4) = 0 \end{cases}.$$

Chiamata $y^*(x)$ la soluzione del problema, determinare il suo dominio.

* * *

Esercizio 4 (8 **punti**). Data la seguente funzione a 2 variabili:

$$F(x, y) = \sqrt{x^3 + y + 2},$$

trovarne massimi e minimi vincolati alla curva $2x^2 + y^2 = 1$.