

**Matematica per l'Economia e l'Impresa - Corso
Avanzato - 8 Gennaio 2020**

Esercizio 1 (3 + 1 + 4 punti). Consideriamo l'applicazione lineare da \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^4 tale che:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - 2x_3 + x_4, 0, 2x_1 - x_2 + x_4, -2x_2 + 4x_3).$$

1. Determinare delle basi per i sottospazi vettoriali $\text{Ker}(F)$ e $\text{Im}(F)$.
2. Detta $A = M(F)$, determinare la matrice A^2 .
3. Calcolare autovalori ed autovettori di A e stabilire se è diagonalizzabile.

* * *

Esercizio 2 (4 punti). Date le matrici quadrate $A, B \in M_N(\mathbb{R})$, provare che, se $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ è autovettore sia di $A + B$ che di $A - B$, allora \mathbf{w} è anche autovettore sia di A che di B .

* * *

Esercizio 3 (10 punti). Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y(x)}{2x} + \frac{x^2 + 1}{x} \\ y(1) = 2 \end{cases}.$$

Chiamata $y^*(x)$ la soluzione del problema, tracciarne il grafico sul piano cartesiano.

* * *

Esercizio 4 (8 punti). Data la seguente funzione a 2 variabili:

$$F(x, y) = x^2y^2 - 3xy - 4x^2 - 2x,$$

trovarne tutti i punti stazionari e determinarne la natura.

* * *